閉じたポリゴンモデルの体積を求めよう

書いた人:$\dot{R}_Y$

三角形から成る 3 次元ポリゴンモデルの体積を求める方法を説明します。

1 三角錐の体積

3 次元空間に、表裏を持った三角形があるとします。頂点の順番方向に回転する右ねじの進む向きが表です。また、三角形の外に任意の定点を定めます。

三角形の第 1 頂点 P_1 から、他の二頂点 P_2, P_3、および定点 C をそれぞれ結んで、頂点 P_1 から三つの線分が発生しているようにします。すると、その三線分を辺とした四角柱の体積 W は次式のようにベクトルの三重積で表せます。

$$W = (P_2 - P_1)\times(P_3 - P_1)\cdot(P_1 - C)$$

ここで、P_1, P_2, P_3, C は 3 次元ベクトルで、「$\times$」は外積、「$\cdot$」は内積を表します。

そして、三角形を底面とする三角錐の体積 ΔV は四角柱の体積の 1/6 です。

$$\Delta V = \frac{1}{6}W = \frac{1}{6}(P_2 - P_1)\times(P_3 - P_1)\cdot(P_1 - C)$$

注: 三角形の表側が定点を向いている場合は体積はマイナスになります。

2 ポリゴンモデルの体積

ポリゴンモデルの体積 V はそれぞれの三角錐の体積を足し合わせたものになります。i 番目の三角形の頂点をそれぞれ P_{i1}, P_{i2}, P_{i3} とすると次式のようになります。

$$\begin{aligned} V &= \sum_{i=0}^{N} \Delta V_i \\ &= \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{N}(P_{i2} - P_{i1})\times(P_{i3} - P_{i1})\cdot(P_{i1} - C) \end{aligned}$$

ただし、この方法はポリゴンモデルが自己交差せず、閉じている必要があります。特に、閉じていない場合は定点 C のとり方によって体積の値が変わります。

また、定点 C はポリゴンモデル全体から近い位置 (例えば重心) にとったほうが計算の精度がよくなります。

3 おまけ

3 次元ベクトルの演算、内積と外積は次のように定義されています。ただし、$\mathbf{i}$,$\mathbf{j}$,$\mathbf{k}$ はそれぞれ直交する x, y, z 方向の単位ベクトルです。

$$P\times Q = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix}$$

$$P\cdot Q = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

上に述べた方法は、ガウス積分

$$\int_S \mathbf{A}\cdot d\mathbf{S} = \int_V \mathrm{div}\mathbf{A}dV$$

で、$\mathbf{A} = \frac{1}{3}(\mathbf{i}x + \mathbf{j}y + \mathbf{k}z)$ としたものに相当します。(ガウス積分がどんなもんかは自分で調べようね。)

[参考文献] 代数の教科書、ベクトル解析の教科書